Topologia
Lista 3 (topologia, baza topologii)

Zad 1. Pokazać, że wykonując dowolną ilość razy operacje domknięcia i dopełnienie na ustalonym podzbiorze przestrzeni topologicznej otrzymamy maksymalnie 14 różnych zbiorów. Ile zbiorów otrzymamy w przypadku podzbioru $(0,1)\cap\mathbb{Q}\cup[2,3)\cup\{5\}$ prostej euklidesowej $\mathbb{R}$?

Zad 2. Opisać topologię oraz rodzinę zbiorów domkniętych wyznaczonych przez metrykę dyskretną.

Zad 3. Porównać wszystkie topologie z zadań 5, 6, 7, 8 z listy 1.

Zad 4. Które z podanych rodzin stanowią topologię na zbiorze $X=\{a,b,c\}$:
a) $\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,
b) $\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$,
c) $\{\emptyset,\{a\},\{b\},X\}$,
d) $\{\emptyset,\{a,b\},\{b,c\},X\}$.

Zad 5. Pokazać, że w każdej przestrzeni topologicznej metryzowalnej X, to jest takiej w której topologia pochodzi od metryki,
a) zbiór jednoelementowy jest domknięty,
b) spełniony jest *warunek Hausdorffa*, tj. $\forall_{x,y\in X}\ \exists_{\substack{U,V\subset X\, zb.\ otwarte\\ x\in U,\ y\in V}}\ U\cap V=\emptyset$.

Zad 6. Niech X będzie zbiorem liczb naturalnych. Sprawdzić, które z danych rodzin są topologiami na X:

$$F_1=\{\{1,2,3,...,n\}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\},\qquad F_2=\{\{1,3,5,...,2n-1\}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\},$$

$$F_3=\{A\subset X:\ A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A=X\},$$

$$F_4=\{A\subset X:X\setminus A \text{ jest zbiorem skończonym lub } A=\emptyset\}$$

Dla rodzin będących topologiami wyznaczyć rodziny zbiorów domkniętych i sprawdzić, czy pochodzą one od metryki?

Zad 7. Niech $f:X\to Y$ będzie odwzorowaniem, gdzie X jest zbiorem a (Y,τ) przestrzenią topologiczną. Czy rodzina $\tau_f=\{f^{-1}(U):U\in\tau\}$ jest topologią na X?

Zad 8. Sprawdzić, że jeżeli (X,τ) jest przestrzenią topologiczną i $A\subset X$, to para (A,τ_A), gdzie $\tau_A=\{U\cap A:U\in\tau\}$ jest przestrzenią topologiczną.

Zad 9. Opisać najmniejszą topologię na płaszczyznie $X=\mathbb{R}^2$, w której wszystkie proste są zbiorami domkniętymi. Porównać tę topologię z topologią euklidesową.

Zad 10. Pokazać, że rodzina $\mathcal{B}=\{(a,b)\times\mathbb{R}:\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ jest bazą topologii na płaszczyznie $X=\mathbb{R}^2$. Porównać tę topologię z topologią euklidesową oraz wyznaczyć wnętrza oraz domknięcia zbiorów
$A=\{(x,y):x-1<y<x+1\}$, $\quad B=\{(x,y):-1\le y\le 1\}$, $\quad C=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$.

Zad 11. Sprawdzić, czy rodzina $\mathcal{B}=\{[a,b),(a,b]:\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b\}$ jest bazą pewnej topologii na $\mathbb{R}$.

Zad 12. Pokazać, że istnieje baza przeliczalna wprowadzająca na $\mathbb{R}$ topologie euklidesową.

Zad 13. Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą topologi na $\mathbb{R}$ składająca sie z przedziałów (a,b), $a<b$. Pokazać, że topologia płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ pokrywa się z topologią wprowadzona przez bazę $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$.

Zad 14. Pokazać, że rodziny $\mathcal{B}_{[\,)}=\{[a,b):a,b\in\mathbb{R}\}$, $\mathcal{B}_{(\,]}=\{(a,b]:a,b\in\mathbb{R}\}$ są bazami pewnych topologii na $\mathbb{R}$, które oznaczać będziemy odpowiednio przez $\tau_{[\,)}$ i $\tau_{(\,]}$.
a) Czy topologie $\tau_{[\,)}$, $\tau_{(\,]}$ są uboższe, czy bogatsze od topologi euklidesowej?
b) Czy ciągi $x_n=1+\frac{1}{n}$, $y_n=1-\frac{1}{n}$ są zbieżne w topologii $\tau_{[\,)}$ lub $\tau_{(\,]}$?
c) Pokazać, że $\tau_{[\,)}\cap\tau_{(\,]}$ jest topologią na $\mathbb{R}$. Co to za topologia?
d) Opisać topologię generowaną przez $\tau_{[\,)}\cup\tau_{(\,]}$.

Zad 15. Niech $X=\{x_0,x_1,x_2,...\}$ będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym. Pokazać, że rodzina

$$\mathcal{B}=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},...\}\cup\{U\subset X:\ X\setminus U \text{ zbiór skończony i } x_0\in U\}$$

jest bazą pewnej topologi na X. Opisać operację wnętrza i operacje domknięcia w tej topologii.